数理解析研究所講究録
第 1833 巻 2013 年 47-69

SORGENFREY TOPOLOGIES ON THE PLANE AND UNFAIR COIN TOSSING

AKIO KATO
(加藤 昭男)

ABSTRACT. We introduce a regular, Lindelöf, generalized metric topology on the plane. Though apparently this topology does not include any copy of the Sorgenfrey line, we can find such a copy by finding an extremely flat, strictly increasing, continuous, new function, which is flatter than the well-known Lebesgue's singular function. To construct such a function, we toss infinitely many unfair coins infinitely many times.

1. INTRODUCTION.

Generalized Metric Theory において、具体的な興味ある空間の例を提供したい、というのが、この講演の主たる目的です。結果として、確率論との繋がりが出て来たことは面白い現象だと思っています。

平面 $\mathbb{R}^2$ 上に次のような位相を考えます。
平面上のユークリッド距離 d から定まる通常のユークリッド位相を τ_d と表します。また、中心 z , 半径 r の開円板を $B(z;\,r)$ と表すことにします。
いま、水平線 $y=y_0$ に点 $z=(x,y_0)$ において上方から接するような直径 s の開円板を考え、この開円板と点 z とを合わせた集合を $V(z;s)$ と記し、tangent disc at z of height s と呼ぶことにします。つまり、

$$V(z;s)=\{z\}\cup B(z_*;\,s/2)$$

where $z_*=(x,\,y_0+s/2)$ です。水平線 $y=y_0$ 上に任意に open segment

$$J=\widehat{z_1 z_2}=\{(x,y_0):x_1<x<x_2\}$$

with endpoints $z_1=(x_1,y_0)$, $z_2=(x_2,y_0)$ をとり、J から半開区間 $(0,1]$ への任意の関数 g を考えます。この g は必ずしも連続とは限りません。J の各点 z で height $g(z)$ の tangent disc $V(z;g(z))$ をとり、これらの和集合を

$$V(g)=\bigcup_{z\in J}V(z;g(z))$$

と記します。さらに、J を直径とする開円板の下半分

$$B_-(J)=B(z_0;\,|J|/2)\cap(\mathbb{R}\times(-\infty,y_0])$$

where $z_0=((x_1+x_2)/2,\,y_0)$ を考え、これと $V(g)$ とを合わせた集合を $W(y_0,J,g)$ と記します：

$$W(y_0,J,g)=V(g)\cup B_-(J)$$

平面 $\mathbb{R}^2$ 上で、 $-\infty < y_0 < \infty$, open segment J, function g を任意に動かしたときの $W(y_0, J, g)$ の全体を base とする topology を τ とします。この topology τ on $\mathbb{R}^2$ がこの講演で考える topology です。面倒な議論を避けるため、 $W(y_0, J, g)$ は更に条件

$$W(y_0, J, g) \subseteq B(z_0; |J|/2)$$

を満たしている、つまり、J を直径とする開円板に含まれている、としてもかまいません。この $W(y_0, J, g)$ の形は Figure 1 を参考にしてください。

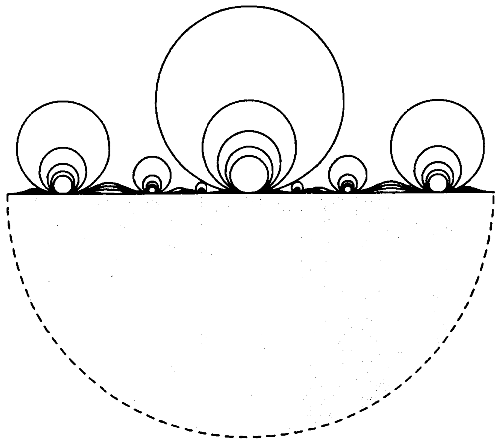

FIG. 1. Typical nbd of τ

明らかに、この新位相 τ はユークリッド位相 τ_d よりも細かいですが、面白いことに、任意の直線を考えると、その直線の上では τ はユークリッド位相 τ_d に一致しています。また、昨年度の数理研講究録 [6] (または [7]) における手法を使いますと τ は regular であることがわかります。[6] では単位円板上の hyperbolic metric を利用しましたが、代わりに上半平面の hyperbolic metric を利用して $W(y_0, J, g)$ をわずかに変形 $W^*(y_0, J, g) = V^*(g) \cup B_-(J)$ すれば、y_0, J を固定して function g を動かしたときの $W^*(y_0, J, g)$ の全体は closure-preserving w.r.t. τ になることがわかります。従いまして、たとえば、$(\mathbb{R}^2, \tau)$ の dense subspace $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \tau)$ は stratifiable (M_3) になることがわかります ($\mathbb{Q} = rationals$)。しかし、残念ながら、後で示しますが、whole space $(\mathbb{R}^2, \tau)$ は stratifiable になりません。実は、さらに強く、monotonically normal にならないことを示します。

2. HEREDITARY LINDELÖFNESS

この Section では、τ が hereditarily Lindelöf（同じことですが perfectly normal）であることを示します。S を Sorgenfrey line つまり実数直線 $\mathbb{R}$ に half-open interval $(a, b]$ topology を入れたものとします。

Fact 1. *S is hereditarily Lindelöf.*

Proof. これはよく知られていることです (cf. Example 3.8.14 in [3]) が、幾何学的にわかりやすい証明を与えておきます。任意に collection $\{(a_\lambda, b_\lambda] : \lambda \in \Lambda\}$ が与えられ、$G = \cup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda]$ とおいたとき、G が countable 個の $(a_\lambda, b_\lambda]$ で cover されることを示せばよい。(a_λ, b_λ) は open interval だから $G_0 = \cup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda)$ は通常の Euclidean line $\mathbb{R}$ の中の open set である。Euclidean line は hereditarily Lindelöf だから G_0 は countable 個の $(a_\lambda, b_\lambda) \subset (a_\lambda, b_\lambda]$ で cover される。よって $G \backslash G_0$ が countable であることを示せば十分である。$\mathbb{R}$ が separable, linearly ordered であることを使うと、G_0 は disjoint union of countably many open intervals の形に表される：

$$G_0 = \cup_{n\in\omega}(c_n, d_n)$$

(some, at most one, d_n might be ∞.) いま、$G \backslash G_0$ に属する任意の元 b_λ を選ぶと、G_0 の定義から $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (c_n, d_n)$ となる n が存在する。もし $b_\lambda < d_n$ とすると $b_\lambda \in (c_n, d_n) \subseteq G_0$ となり、b_λ の選び方に矛盾する。よって、$b_\lambda = d_n$ となる。ゆえに $G \backslash G_0 \subseteq \{d_n : n \in \omega\}$ である。□

次の Facts 2 and 3 は、hereditarily Lindelöf を示すには その open subset の Lindelöf 性を示せばよい、ということに注意すれば証明されます。Fact 3 は Problem 4.5.16(d) in [3] を参照してください。

Fact 2. *Hereditarily Lindelöf space の continuous image は hereditarily Lindelöf である。*

Fact 3. *Second-countable space と hereditarily Lindelöf space との積空間は hereditarily Lindelöf である。*

さて、我々の空間 $(\mathbb{R}^2, \tau)$ にもどりますと、その近傍 $W(y_0, J, g)$ の下半分は半円板 $B_-(J)$ を含んでいますから、topology τ は $\mathbb{R} \times S$ の continuous image になっています。$\mathbb{R} \times S$ は Facts 1 and 3 より hereditarily Lindelöf です。以上から

Property 1. $(\mathbb{R}^2, \tau)$ は *hereditarily Lindelöf である。*

3. Sorgenfrey line in $(\mathbb{R}^2, \tau)$

この Section では、$(\mathbb{R}^2, \tau)$ が monotonically normal にならないことを示します。そのために、次の Facts を使います。

Fact 4. *Sorgenfrey line S は stratifiable (M_3) ではない。従って、S と convergent sequence の積空間 $S \times (\omega + 1)$ は monotonically normal ではない。*

実際、stratifiable spaces は (countably) productive ですから、もし S が stratifiable と仮定しますと、$S \times S$ も stratifiable 従って paracompact 従って normal となります。しかし、よく知られているように $S \times S$ は normal ではありません。よって S は stratifiable になりません。このことと
「$X \times (\omega + 1)$ is monotonically normal if and only if X is stratifiable」

(see Theorem 5.22 in [6]) という定理とから、$S \times (\omega+1)$ は monotonically normal でない、という結果が従います。Monotonically normal space の subspace は monotonically normal ですから、 Fact 4 より、$(\mathbb{R}^2, \tau)$ の中に $S \times (\omega+1)$ の copy を探せば、$(\mathbb{R}^2, \tau)$ が monotonically normal にならないことがわかります。それにはまず、S の copy を探さねばなりません。いま、C を通常の Cantor set in [0,1] とし、C 上で half-open interval topology τ_H を考えます。つまり、τ_H は $(a,b] \cap C$ where $a < b \in C$ を base としたものです。C の「左端点」のみから成る countable 集合を C_0 とします。すなわち、$\mathbb{R} \backslash C$ を disjoint union of open intervals $\cup_{n\in\omega}(c_n, d_n)$ と表したとき、$C_0 = \{d_n : n \in \omega\}$ です。(C, τ_H) においては C_0 の点のみが isolated になっていますが、残りの閉集合 $C \backslash C_0$ は Sorgenfrey line に homeomorphic になることが、次のようにして確かめられます：

Point $\sum_{n\geqslant 1}(2t_n)3^{-n}$ where $t_n = 0, 1$ を point $\sum_{n\geqslant 1} t_n 2^{-n}$ に写す写像 $\varphi : C \to [0,1]$ を考え、τ_* を half-open interval topology on (0,1] とすれば、φ は $(C\backslash C_0, \tau_H)$ を $((0,1], \tau_*)$ の上へ homeo に写しています。しかも、$((0,1], \tau_*)$ と S はどちらも disjoint sum of countably many copies of $((0,1], \tau_*)$ に分割されますから、$((0,1], \tau_*)$ は S に homeo です。

この $\varphi : C \to [0,1]$ を $[0,1]$ 上に自然に拡張した continuous non-decreasing function $\widetilde{\varphi} : [0,1] \to [0,1]$ のグラフが、いわゆる「Devil's staircase (悪魔の階段)」です。Figure 2 を見てください。

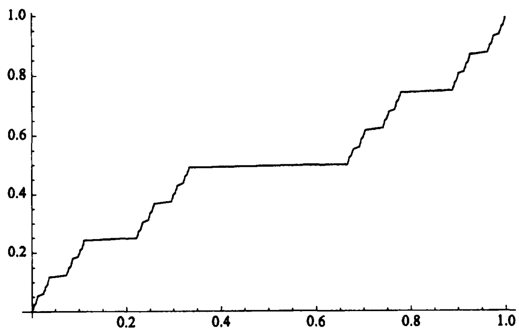

FIG. 2. Cantor's Devil-Angel staircase

これは余談ですが、「悪魔の階段」と呼ばれるのは、階段が無数にあるので、そう呼ばれるようになったと思われますが、「踊り場または休憩所」を十分広く良い間隔で設定してあることの方に目を向ければ優しい階段であり「天使の階段 (Angel's staircase)」とも呼べると思います。

さて、話をもとにもどして、以上の考察から、$(\mathbb{R}^2, \tau)$ の中に S の copy を探すには、ユークリッド位相 $(\mathbb{R}^2, \tau_d)$ の中で 或る Jordan curve l とその中に埋め込まれている Cantor set C を見つけ、位相 τ で見たときの (C, τ) が half-open interval topology になっているものを探し出せば十分であることがわかります。

Theorem 1. 次の性質を持つ *strictly increasing, continuous function* $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定する：
L のグラフ $l = Graph(L)$ は、ユークリッド位相 τ_d で見たとき *Cantor set* の *copy* になっているような集合 C を含み、

($\star$) C の各点 z において十分小さい $\varepsilon_z > 0$ をとれば *tangent disc* $V(z; \varepsilon_z)$ と l との共有点は z のみになる。

このとき、 *topology* τ は C の上で *half-open interval topology* になっている。したがって、$(\mathbb{R}^2, \tau)$ は *Sorgenfrey line* の *copy* を含む。

Proof. 上述の C 上に点 $z_0 \in C \subset l$ を任意にとります。z_0 を中心とする半径 $\delta > 0$ の open ball $B(z_0; \delta)$ を任意にとり、J をその水平な直径とします。このとき、 τ の近傍

$$W(y_0, J, g) = (\bigcup_{z \in J} V(z; g(z))) \cup B_-(J)$$

と curve l との交わりが l 上の half-open interval となるように function g をうまく選べることを示せばよいわけです。実際、 g は次のように定められます。点 z_0 では条件 ($\star$) より $V(z; g(z_0)) \cap l = \{z_0\}$ となる $0 < g(z_0) < \delta$ が取れます。 $J \backslash \{z_0\}$ 上の点 z に対しては function L が strictly increasing, continuous であることに注意すれば

$$V(z; g(z)) \cap l = \emptyset, \quad V(z; g(z)) \subset B(z_0; \delta)$$

となるような $g(z) > 0$ がとれます。このような g に対して $W(y_0, J, g) \cap l$ は z_0 を右端とする l 上の half-open interval になります。□

この Theorem 1 の仮定を満たすような function L の存在は、次章以降で示します。上で述べた Devil-Angel's curve $\widetilde{\varphi}$ は明らかに「踊り場の線分 (左端を含み、右端は含まない) 上の各点 z において、tangent disc $V(z; \varepsilon_z)$ との共有点が z のみになるように $\varepsilon_z > 0$ をとれる」という性質をもちますが、残念ながらこの関数は strictly increasing にはなっていません。

Therem 1 における Cantor set C と curve $l = Graph(L)$ の pair $C \subset l$ を考え、これを右に $1/n$ だけ平行移動させたものを $C_n \subset l_n$ とします。そうすると、$(C \cup \cup_{n \geqslant 1} C_n, \tau)$ は $S \times (\omega + 1)$ に homeo な closed subset になっています。ゆえに、次の結果が得られました。

Property 2. $(\mathbb{R}^2, \tau)$ は $S \times (\omega + 1)$ の *copy* を *closed subset* として含む。従って、とくに τ は *monotonically normal* ではない。

4. Lebesgue's singular function

以下、記述を簡単にするため、平面全体 $\mathbb{R}^2$ の代わりに unit square $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ を考えますが、本質的な違いはありません。

Lebesgue が現在 Lebesgue 測度論と呼ばれている測度論を創始したときから、Lebesgue's singular function という関数 $L_a(x)$ が知られています。これは次のように定義されます。

表と裏が対称でない、つまり重さに偏りがあるコイン (unfair coin) を無限回投げる、いう試行を考えます。表が出る確率が $0 < a < 1$、裏が出る確率が $1-a$ で $a \neq 1/2$ とします。無限回投げ、表に "0", 裏に "1" を対応させますと 0, 1 から成る sequence $(t_1, t_2, t_3, \cdots)$ が得られます。これに、2 進小数展開した実数

$$t = \sum_{n \geqslant 1} t_n/2^n \in [0,1]$$

を対応させることができます。この t が実数直線の大小関係で $t \leqslant x$ となる確率を $L_a(x)$ と定義します：

$$L_a(x) = Prob\{t \leqslant x\}, \quad x \in [0,1]$$

いわゆる「分布関数」(distribution function of t) です。（この $L_a(x)$ の厳密な定義は次の Section を見てください。）条件 $a \neq 1/2$ があるため ($a = 1/2$ のときは $L_a(x) = x$ となる) この関数は一風変わった性質を持ちます。L_a は strictly increasing, continuous でその微分は Lebesgue measure の意味でほとんど至る所 0 になります。"Singular" という言葉は「微分がほとんど至る所 0 」という意味で使われています。しかし、具体的にどんな点 $x \in [0,1]$ において微分係数が 0 になるのかは、河邑紀子 (かわむらきこ) 氏 (North Texas 大) の研究により、最近になってわかってきました。たとえば、次の結果が得られています。

Fact 5. (K.Kawamura[8]) *Binary normal point* $x \in [0,1]$ においては微分係数 $L'_a(x) = 0$ である。

ここで、$x \in [0,1]$ が binary normal であるとは、その dyadic expansion (2 進展開) $x = \sum_{n \geqslant 1} x(n)/2^n$ において digit 0 と digit 1 とが確率 1/2 で均等に現れる、ということです。正確に表現しますと、x の 2 進小数展開において小数第 n 位までに現れる digit 0, digit 1 の個数をそれぞれ

$$\#0(x;n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 - x(k)), \quad \#1(x;n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x(k)$$

と表し、 digit 0, digit 1 の "density" を

$$d_0(x) = \lim_{n \to \infty} \#0(x;n)(x)/n, \quad d_1(x) = \lim_{n \to \infty} \#1(x;n)(x)/n$$

(この極限値 $d_0(x)$, $d_1(x)$ はいつも存在するとは限らない) と定めますと、x が binary normal であることは、$d_0(x) = d_1(x) = 1/2$ ということです。$d_0(x) = \alpha$ となる $x \in [0,1)$ の全体を $N(\alpha)$ と表しますと、$N(1/2)$ が binary points の全体になります。

たとえば、$1/3 = \sum_{n \geqslant 1} 4^{-n} = .01010101 \cdots$ (2 進展開) 及びその有限個の

digits を任意に変化させたもの $.x(1)x(2)\cdots x(m)01010101\cdots$ は $N(1/2)$ に属しますから、$N(1/2)$ は dense in [0,1] です。実は更に強く、$N(1/2)$ は Lebesgue measure 1 の Borel set in [0,1] であることが知られています。この Lebesgue measure 1 という結果は確率論の「大数の強法則」からの帰結です。つまり、簡単に言えば（unfair でない） fair coin を無限回投げた場合、表 “0” と裏 “1” が ほぼ均等に現れるだろうから、ほとんどの実数は binary normal になるはずである、ということです（次の Remark 1 参照)。Lebesgue measure μ は内部正則 (inner regular) すなわち「任意の Borel set B の measure μ(B) が B に含まれる compact set K の measure μ(K) の上限として得られる」という性質を持ちますから、$N(1/2)$ は Cantor set の copy C を含みます。さて、それでは、関数 L_a は この Cantor set C 上で、Theorem 1 の仮定 ($\star$) を満たしているでしょうか？　これは、実は、かなり微妙な問題なのです。Fact 5 から C 上では微分が 0 ですが、微分が 0 ということのみから、グラフがその点で接する円板より下にある、ということは導けません。つまり、「グラフがその点で接する円板より下にある」ということは、微分が 0 という 1 次的接触よりももっと強い「２次以上の接触」になっている、ということなのです。論文 [8] の手法を少し詳細に検討してみましたところ、紀子さんの証明を modify すれば「$a \leqslant 1/16$ ならば L_a は Theorem 1 の仮定を満たす」ということが確認できました。$N(1/2)$ の代わりに $N(\alpha)$ で α の値を 1 に十分近く選べば、$a < 1/4$ でも大丈夫だろうと思われます。Section 1 で考えた topology は「円」の代わりに、より高次な接触をする「楕円」のようなものを用いて定義することも可能で、そのときでもまた、Theorem 1 に対応する曲線 l と Cantor set C が存在するだろうか？という疑問が出てきます。L_a でも a を十分に小さく取れば対応できますが、一般に L_a のグラフは、そのグラフの下の部分の面積が a になりますので、 a が小さいと、ほとんど x 軸にへばりついたようなカッコウ悪いものになってしまいます。この状況を改善するため、次章で L_a の定義を拡張して、新しい関数を構成します。

なお、関数 $L_a(x)$ のフラクタル的性質等は [10] に詳述されていますので、参照してください。

Remark 1.　いままで確率 a で表の出る “unfair” coin を扱っていたのに、ここで急に確率 1/2 で表の出る “fair” coin が出て来て、変な感じを受けたかもしれませんが、そのカラクリは以下の通りです。

いま、条件 $a \neq 1/2$ を仮定しないで $0 < a < 1$ に対し L_a を考え、 L_a から定まる measure ν_a on [0,1] を考えます。すなわち ν_a は

$$\nu_a((x,y]) = L_a(y) - L_a(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$$

より定まる measure で、 たとえば $\nu_a([0,1/2]) = a,\ \nu_a([1/2,1]) = 1-a$ となっていて、$\nu_{1/2}$ は Lebesgue measure そのものです。$a \neq a'$ のときは ν_a と $\nu_{a'}$ は著しく性格を異にする measure で一方で測ると measure 0 なのに、他方で測ると measure 1 になる集合が出て来ます。この状況を「ν_a と $\nu_{a'}$ は互いに “singular” である」といいます。 ν_a $(a \neq 1/2)$ と Lebesgue measure $\nu_{1/2}$ の場合は、$N(1/2)$ について $\nu_a(N(1/2)) = 0,\ \nu_{1/2}(N(1/2)) = 1$ となっており、

$$\frac{L_a(y)-L_a(x)}{y-x}=\frac{\nu_a((x,y))}{\nu_{1/2}((x,y))},\quad 0\leqslant x<y\leqslant 1$$

ですから、Fact 5 は「measure ν_a と measure $\nu_{1/2}$ の違いを関数 L_a によって表現している」と捉えれば、何ら不自然なものではありません。

5. Extremely flat, strictly increasing, continuous function

今度は、また無限回 coin を投げるのですが、毎回異なる coin を投げる、という試行を考えます。第 n 回目に投げる coin の表 "0" が出る確率は $0<a_n<1$ であり、裏 "1" が出る確率は $b_n=\widehat{a}_n=1-a_n$ であるとします。一般に $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ に対し $1-\alpha$ を $\widehat{\alpha}$ と表すことにします。$a_n=a$ (a is constant) の場合は前節の $L_a(x)$ と同じになってしまいますが、ここで我々が具体例として、頭の中に思い浮かべているのは

$$a_1=1/2,\quad a_n=1/n\quad(n\geqslant 2)$$

のような case です。この場合は

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\to 0,\qquad \sum_{n\geqslant 1}a_n=\infty$$

となっていますので我々が望んでいる関数が得られる、ということをこれから順次説明していきます。前節と同様にして、無限回投げた結果の、0, 1 から成る sequence $(t_1,t_2,t_3,\cdots)$ に、実数 $t=\sum_{n\geqslant 1}t_n/2^n\in[0,1]$ を対応させ、その分布関数を

$$L(x)=Prob\{t\leqslant x\},\quad x\in[0,1]$$

と定めます。正確には $L(x;(a_n)_{n\geqslant 1})$ と表記すべきですが、簡単のため $L(x)$ と略記します。

「分布関数」という表現だけですと、若干のあいまいさが残りますので、次に $L(x)$ の厳密な定義を実行します。

$$\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\prod_{n\geqslant 1}\{0,1\}_n$$

を countable product とし、2点 $\{0,1\}_n=\{0,1\}$ 上の probability measure

$$\pi_n(\{0\})=a_n,\ \ \pi_n(\{1\})=b_n=\widehat{a}_n$$

から定まる product probability measure $\pi_\infty=\Pi_{n\geqslant 1}\pi_n$ on Ω を考えます。

$$\Phi:\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]$$

$$\Phi((x(n))_{n\in\mathbb{N}})=\sum_{n\geqslant 1}x(n)\,2^{-n}=\cdot_{(2)}\,x(1)x(2)\cdots$$

を dyadic expansion によって定まる map とします。Topological には、Φ は Cantor space $\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ から interval [0,1] への continuous, onto map であり、本質的には、Section 2 の Devil's staircase をつくるときに用いた関数 φ と同じです。$k/2^m$ $(k=0,1,\cdots,2^m;\ m\geqslant 1)$ の形の rational を "dyadic rational" と言います。0, 1 は例外として、$(0,1)$ 内にある dyadic rationals

全体を Q_2 と表し、$\sum_{1\leqslant n\leqslant m} x(n)\,2^{-n}$ where $x(m)=1$ と表されるもの全体を $Q_2^{(m)}$ と記しますと、Q_2 は disjoint union の形

$$Q_2 = \bigcup_{m\geqslant 1} Q_2^{(m)}$$

e.g., $Q_2^{(1)} = \{1/2\}$, $Q_2^{(2)} = \{1/4,\ 3/4\}$, $Q_2^{(3)} = \{1/8,\ 3/8,\ 5/8,\ 7/8\}, \cdots$
に表されます。$Q_2^{(m)}$ の元は２通りの expansion

$$.\,x(1)\cdots x(m-1)0111\cdots = .\,x(1)\cdots x(m-1)1000\cdots$$

を持ちますので、Φ は 2-1 map ですが、$|\Phi^{-1}(t)| = 2$ となる t は Q_2 の元のみです。我々が考えている expansion は $.\,***\cdots$ の形のみですので、$1 = .\,111\cdots$ については expansion $1.000\cdots$ は考えていません。
$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上に lexicographic order $\preceq$ を考えれば

$$\Phi : (\Omega, \preceq) \to ([0,1], \leqslant)$$

は order-preserving になっていて、この Φ によって２点

$$(x(1), \cdots, x(m-1), 0, 1, 1, 1\cdots) \prec (x(1), \cdots x(m-1), 1, 0, 0, 0\cdots)$$

が１点　$.\,x(1)\cdots x(m-1)0111\cdots = .\,x(1)\cdots x(m-1)1000\cdots$　にくっ付けられる、という状況になっています。（この lexicographic order $\preceq$ というのは、奇妙なものではなく、Ω を通常の Cantor set として $[0,1]$ に embed したときに、$[0,1]$ の自然な順序から inherit されるものです。）

$$\Phi : \Omega \backslash \Phi^{-1}(Q_2) \to [0,1] \backslash Q_2$$

は bijection です。この Φ によって (Ω, π_∞) から induce される measure on [0,1] を ν_∞ とします。つまり

$$\nu_\infty(B) = \pi_\infty(\Phi^{-1}(B))$$

for Borel set $B \subset [0,1]$ です。π_∞ は countably additive ですから ν_∞ も countably additive になります。以上の準備のもと、関数 $L : [0,1] \to [0,1]$ は

$$L(x) = \nu_\infty([0,x])$$

と定義されます。明らかに $L(x)$ は strictly increasing で $L(1) = 1$ です。
また、ν_∞ は countably additive ですから $L(x)$ は right continuous

$$L(x+\delta) \to L(x) \quad (\delta \to +0)$$

となります。一般には $L(x)$ は continuous になりませんが、increasing ですので、continuous にならない点、つまり “gap”

$$G(x) = L(x) - L_-(x) \quad \mathit{where}\ L_-(x) = \lim_{\delta\to+0} L(x-\delta)$$

が >0 となる点 x は高々 countable 個しかありません。したがって、ほとんどの所で L は continuous であると言えます。

しかし、[0,1] 全体で continuous になるものも欲しいですので、そのための条件を確認しておきます。Continuous everywhere になる必要十分条件は $\nu_\infty(\mathit{singleton}) = 0$ すなわち $\pi_\infty(\mathit{singleton}) = 0$ ですが、これと同値な条件

で見やすいものを求めておきます。Finite sequence $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{0, 1\}$ から定まる clopen set in $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を

$$\langle \sigma \rangle = \sigma \times \Pi_{k>n} \{0, 1\}_k$$

と表し、その π_∞-measure を $P(\sigma)$ と表しますと、π_∞ の定義より

$$P(\sigma) = \pi_\infty(\langle \sigma \rangle) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^{\widehat{\sigma}(k)}\, b_k^{\sigma(k)} = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (a_k + (b_k - a_k)\,\sigma(k))$$

$$= \prod_{\sigma(k)=0,\ k \leqslant n} a_k \cdot \prod_{\sigma(k)=1,\ k \leqslant n} b_k > 0$$

(ただし $\widehat{\sigma}(k) = \widehat{\sigma(k)}$ とする) となります。 $P(\emptyset) = 1,$

$$P(\sigma^\frown 0) = P(\sigma)\, a_n, \quad P(\sigma^\frown 1)) = P(\sigma)\, b_n \quad \mathit{for}\ |\sigma| = n - 1$$

としても $P(\ )$ の定義を帰納的に与えたことになります。 $x = (x(n))_{n \geqslant 1} \in \Omega$ の singleton としての π_∞-measure は $\sigma = (x(k))_{k \leqslant n}$, $|\sigma| = \mathit{Length\ of}\ \sigma \to 0$ としたときの $P(\sigma)$ の極限値ですから

$$\pi_\infty(x) = \prod_{x(n)=0} a_n \cdot \prod_{x(n)=1} b_n$$

となります (正確には $\pi_\infty(\{x\})$ と表すべきものですが $\pi_\infty(x)$ と略記します)。よって、この右辺の形の積が常に 0 になることが、L が continuous になるための必要十分条件です。

$$\alpha_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad \beta_n = \max\{a_n, b_n\}$$

とおきますと

$$0 < \alpha_n \leqslant 1/2 \leqslant \beta_n = 1 - \alpha_n < 1, \quad \pi_\infty(x) \leqslant \prod_{n \geqslant 1} \beta_n$$

であり、ちょうど $\pi_\infty(x) = \prod_{n \geqslant 1} \beta_n$ となるような点 x が存在します。
よって、次が言えます。 ここで一般に $0 < c_n < 1$ のとき、条件
$\prod_{n \geqslant 1} c_n = 0$ は $\sum_{n \geqslant 1} (1 - c_n) = \infty$ と同値であることを思い出してください。

Property 3. $L(x) = L(x; (a_n)_{n \geqslant 1})$ が *continuous on* [0,1] になるための必要十分条件は

$$\prod_{n \geqslant 1} \beta_n = 0, \quad \mathit{i.e.}, \quad \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n = \infty$$

である。 □

この条件は、もちろん 或る番号から先で a_n が constant $0 < a < 1$ になっているときは満足されますが、たとえば或る番号から先で

$$a_n = 1/n \ \text{ or } \ 1 - 1/n$$

などとなっている場合でも満足されます。

Property 4. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ が条件

$$0 < a_n \leqslant 1/2, \ i.e., \ 0 < a_n \leqslant 1/2 \leqslant b_n < 1 \ \ for\ almost\ all\ \ n$$

を満たしている場合は、L が *continuous on* [0,1] となるための必要十分条件は

$$\prod_{n\geqslant 1} b_n = 0, \quad i.e., \quad \sum_{n\geqslant 1} a_n = \infty$$

である。そうでないとき、すなわち $\prod_{n\geqslant 1} b_n > 0$ のときは、L は $Q_2 \cup \{1\}$ においてのみ *discontinuous* である。

Proof. 前半は Property 3 より明らかですから、後半を示します。a_n の条件より、もし $x(n) = 0$ となる n が無限個あるような x については $\pi_\infty(\{x\}) \leqslant \prod_{x(n)=0} a_n = 0$ となりますので、Ω の点で π_∞-measure > 0 となる可能性があるのは $(*, \cdots *, 1, 1, 1 \cdots)$ の形のもののみです。従って、$[0,1]$ の点で ν_∞-measure > 0 となる可能性があるのは $. * \cdots * 111 \cdots$ の形のもののみ、すなわち $Q_2 \cup \{1\}$ の点のみです。しかも、 点 $. * \cdots * 111 \cdots$ の ν_∞-measure は、$c \cdot \prod_{n\geqslant m} b_n$ for some $c > 0, \ m \geqslant 1$ の形であり、これは仮定 $\prod_{n\geqslant 1} b_n > 0$ より、正の値です。 □

Lemma 1. （1）$L(0) = 0$ となる必要十分条件は $\prod_{n\geqslant 1} a_n = 0$ であり、これは、$(*, \cdots *, 0, 0, 0, \cdots)$ の形の *singleton in* Ω の π_∞*-measure* $=0$ となることと同値である。
（2）$L_-(1) = 1 \ (= L(1))$ となる必要十分条件は $\prod_{n\geqslant 1} b_n = 0$ であり、これは、$(*, \cdots *, 1, 1, 1, \cdots)$ の形の *singleton in* Ω の π_∞*-measure* $=0$ となることと同値である。

Proof. （1）前に、$L(1) = 1$ であると述べましたが、$L(0) = 0$ とは述べませんでした。$L(0) = \nu_\infty(\{0\}) = \pi_\infty(\{(0, 0, \cdots)\}) = \prod_{n\geqslant 1} a_n$ ですから $L(0) = 0$ となる条件は $\prod_{n\geqslant 1} a_n = 0$ です。また、$\pi_\infty\{(*, \cdots *, 0, 0, 0, \cdots)\} = c_m \cdot \prod_{n>m} a_n = C \cdot \prod_{n\geqslant 1} a_n$ for some $m \geqslant 1, \ c_m > 0, \ C > 0$ より、後半の主張が従います。
（2）$\Phi^{-1}(1) = \{(1, 1, 1, \cdots)\}$ ですから $L(1) - L_-(1) = \nu_\infty(\{1\}) = \pi_\infty(\{(1, 1, \cdots)\}) = \prod_{n\geqslant 1} b_n$ 　また、$\pi_\infty\{(*, \cdots *, 1, 1, 1, \cdots)\} = C \cdot \prod_{n\geqslant 1} b_n$ 　for some $C > 0$ だから（2）が成立する。 □

この Lemma 1 (1) の条件は非常にゆるいもので、たとえば、或る番号から先で $0 < a_n \leqslant 1 - 1/n$ となっていれば満たされます。しかもこれがないとなかなか計算が進みませんので、以下、特別に断らない限り、この論文全体を通じて

$(\star\star)$ 　$\underline{L(0) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \prod_{n\geqslant 1} a_n = 0}$

と設定します。

Lemma 2. 任意の *finite sequence* $\sigma = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ に対し
$\sigma_- = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n), 0, 0, 0 \cdots) \prec \sigma_+ = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n), 1, 1, 1 \cdots)$
$x_\sigma = \Phi(\sigma_-) = .\sigma(1) \cdots \sigma(n) \quad < \quad y_\sigma = \Phi(\sigma_+) = .\sigma(1) \cdots \sigma(n)111 \cdots$
$= x_\sigma + 2^{-n}$ (*where* $x_\sigma \in Q_2 \cup \{0\}$, $y_\sigma \in Q_2 \cup \{1\}$) を考えると

$$L(y_\sigma) - L(x_\sigma) = \nu_\infty((x_\sigma, y_\sigma]) = P(\sigma)$$

Proof. Lexicographic order $\preceq$ について

$$\langle \sigma \rangle = [\sigma_-, \sigma_+] \quad in \ \Omega$$

となっています。条件 $(\star\star)$ より singleton σ_- の π_∞-measure は 0 ですから、$\pi_\infty((\sigma_-, \sigma_+]) = \pi_\infty(\langle \sigma \rangle)$ です。

$$\Phi((\sigma_-, \sigma_+]) = (x_\sigma, y_\sigma], \quad \Phi^{-1}((x_\sigma, y_\sigma]) = (\sigma_-, \sigma_+] \cup \{\sigma_*\}$$

であり、ここで、σ_* は $(x(1), \cdots x(m-1), 1, 0, 0, 0 \cdots)$ for $m \leqslant n$ の形の点ですから、条件 $(\star\star)$ よりその π_∞-measure は 0 です。ゆえに

$$\nu_\infty((x_\sigma, y_\sigma]) = \pi_\infty((\sigma_-, \sigma_+] \cup \{\sigma_*\}) = \pi_\infty((\sigma_-, \sigma_+]) = \pi_\infty(\langle \sigma \rangle) = P(\sigma)$$

左辺は、$L(y_\sigma) - L(x_\sigma)$ そのものですから Lemma 2 が示されました。□

これから次のような計算式が導かれます。

Formula 1.
（1）$L(.x(1) \cdots x(n) + 2^{-n}) - L(.x(1) \cdots x(n)) = P(x(1), \cdots, x(n))$
とくに $x(n) = 0$ の場合

$$L(.x(1) \cdots x(n-1)\, 1) - L(.x(1) \cdots x(n-1)) = P(x(1), \cdots x(n-1), 0)$$

（2）$x = .x(1) \cdots x(m-1)\, 1 \in Q_2^{(m)}$, $n > m \geqslant 1$ のとき

$$\begin{aligned} L(x + 2^{-n}) - L(x) &= P(x(1) \cdots x(m-1)\, 1\, 0^{n-m}) \\ &= P(x(1) \cdots x(m-1)\, 1)\ a_{m+1} a_{m+2} \cdots a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x) - L(x - 2^{-n}) &= P(x(1) \cdots x(m-1)\, 0\, 1^{n-m}) \\ &= P(x(1) \cdots x(m-1)\, 0)\ b_{m+1} b_{m+2} \cdots b_n \end{aligned}$$

（3）$x = .x(1)x(2) \cdots x(n-1)\ x(n)\ x(n+1) \cdots,$
$y = .x(1)x(2) \cdots x(n-1)\ \widehat{x}(n)\ x(n+1) \cdots$ のとき

$$|L(y) - L(x)| \leqslant P(x(1), \cdots x(n-1))$$

ただし $k = 0$ のときは、$x(1) \cdots x(k)$ は *empty sequence,* また
$.x(1) \cdots x(k) = 0$ とみなします。

Proof. （1）は Lemma 2 そのものです。
（2）$x_\sigma = x \quad = .x(1) \cdots x(m-1)\, 1\, 0^{n-m}\, 000 \cdots,$
$x_\sigma + 2^{-n} = .x(1) \cdots x(m-1)\, 1\, 0^{n-m}\, 111 \cdots$
where $\sigma = (x(1), \cdots, x(m-1), 1, 0^{n-m})$ とみなせば、$L(x + 2^{-n}) - L(x)$ の式が得られます。また、
$x_\sigma = x - 2^{-n} = .x(1) \cdots x(m-1)\, 0\, 1^{n-m}\, 000 \cdots,$

$x_\sigma + 2^{-n} = x = .x(1)\cdots x(m-1)\,0\,1^{n-m}\,111\cdots$
where $\sigma = (x(1),\cdots,x(m-1),0,1^{n-m})$ とみなせば、$L(x) - L(x-2^{-n})$ の式が得られます。

（3）$\sigma = (x(1)\cdots x(n-1))$ に対し $x_\sigma = .x(1)\cdots x(n-1)000\cdots < y_\sigma = .x(1)\cdots x(n-1)111\cdots$ を考えれば $x_\sigma \leqslant x, y \leqslant y_\sigma$ となっていますから L が increasing であることより $|L(y) - L(x)| \leqslant L(y_\sigma) - L(x_\sigma) = P(\sigma)$ □

次の Formula により原理的にはすべての $x \in Q_2$ について $L(x)$ の値を計算できます。

Formula 2. $x \in Q_2$ が「$x(n) = 1$ となる n は有限個」の形に展開されている場合には

$$L(x) = \sum_{x(n)=1} P(x(1),\cdots x(n-1),0) = \sum_{x(n)=1} P(x(1),\cdots x(n-1))\,a_n$$

Proof. $x \in Q_2^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ としたとき、m についての induction で示します。$m = 1$ のときは上の式は $L(.1) = P(0) = a_1$ となりますが、これは Formula 1 (1) で $n = 1$, $x(1) = 0$ とした case です。

$x = .x(1)\cdots x(m-1)\,1 \in Q_2^{(m)}$ としますと、Formula 1 (1) より $L(x) = L(.x(1)\cdots x(m-1)) + P(\sigma(1),\cdots \sigma(m-1),0)$ ですが、$.x(1)\cdots x(m-1) \in Q_2^{(l)}$ for some $l < m$ ですから induction の仮定より、$L(.x(1)\cdots x(m-1)) = \sum_{x(n)=1,\, n\leqslant l} P(x(1),\cdots x(n-1),0)$ と表されるので、Formula 2 が成立します。□

たとえば、$x = 2^{-m} = .0^{m-1}\,1$ に apply してみますと $x(n) = 1$ となる n は m だけですから

$$L(2^{-m}) = P(0^{m-1},0) = P(0^m) = a_1\cdots a_m$$

となります。したがって

$$L(1/2) = a_1 > L(1/4) = a_1a_2 > L(1/8) = a_1a_2\,a_3 > \cdots \to L(0) = 0$$

となり、原点の回りの状況が見えてきます。他の点でも少し計算を実行してみますと
$L(3/4) = L(.11) = P(\emptyset)\,a_1 + P(1)\,a_2 = a_1 + b_1\,a_2,$
$L(3/8) = L(.011) = \quad 0 \quad + \quad P(0)\,a_2 \;+ P(0,1)\,a_3 = a_1\,a_2 + a_1b_2\,a_3$
$L(5/8) = L(.101) = P(\emptyset)\,a_1 + \quad 0 \quad + \quad P(1,0)\,a_3 = a_1 + b_1a_2\,a_3$
$L(7/8) = L(.111) = P(\emptyset)\,a_1 + P(1)\,a_2 + P(1,1)\,a_3 = a_1 + b_1a_2 + b_1b_2\,a_3$
などと計算されます。

次に、「$x(n) = 1$ となる n が無限個」の場合（Q_2 の元もこの形の展開をもつ）に、上の formula に対応する formula を求めます。いま、$x \in (0,1]$ の binary expansion $x = .x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots$ が与えられ、$x(n) = 1$ となる n が無限個あるとします。この展開を第 n 位のところで切ったもの $x^{(n)} = .x(1)x(2)\cdots x(n)$ を考えますと

$$x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x^{(n)} \leqslant \cdots \to x$$

となっています。L は increasing ですから $L_-(x) = lim_{n\to\infty} L(x^{(n)})$ を考えれば

$$L(x^{(1)}) \leqslant L(x^{(2)}) \leqslant \cdots \leqslant L(x^{(n)}) \leqslant \cdots \to L_-(x)$$

となります。 $x^{(n)} = .x(1)x(2)\cdots x(n) \in Q_2$ は「$x(k)=1$ となる k は有限個」の形ですから $L(x^{(n)})$ に対しては Formula 2 が適用できて

$$L(x^{(n)}) = \sum_{x(k)=1,\, k\leqslant n} P(x(1),\cdots x(k-1),0)$$

ゆえに

$$L_-(x) = \lim_{n\to\infty} L(x^{(n)}) = \sum_{x(k)=1} P(x(1),\cdots x(k-1),0)$$

となりますが、これは L が x で continuous の場合は、$L_-(x) = L(x)$ ですから、形式上は Formula 2 と同じ式です。よって、 Formula 2 の結果と合わせますと、次を得ます。

Formula 3. $L(x)$ が x において *continuous* の場合は、任意の *binary expansion* $x = .x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots \in [0,1]$ に対し

$$L(x) = \sum_{x(n)=1} P(x(1),\cdots x(n-1),0)) = \sum_{x(n)=1} P(x(1),\cdots x(n-1),\widehat{x}(n))$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} x(n)\, P(x(1),\cdots x(n-1),\widehat{x}(n))$$

where $P(x(1),\cdots x(n-1),0) = P(x(1),\cdots x(n-1))\, a_n$ □

たとえば、 $1 = .111\cdots$ に対しては

$$L_-(1) = \sum_{n\geqslant 1} P(1^{n-1},0) = \sum_{n\geqslant 1} b_1\cdots b_{n-1}\, a_n$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} b_1\cdots b_{n-1}\,(1-b_n) = 1 - \prod_{n\geqslant 1} b_n$$

となりますが、L の連続性を仮定したときは $\prod_{n\geqslant 1} b_n = 0$ ですから $L(1) = L_-(1) = 1$ となります。

上の Formula 3 は、$L = L_a$ $(0 < a < 1$ is constant$)$ の場合には Lomnicki and Ulam [9] (cf.[8]) によって得られたものと同じです。

6. Fractal Structure of L

初めに、$L(x)$ は正確には $L(x;(a_n)_{n\geqslant 1})$ と表記すべきであると言いましたが、$L(x)$ は $(a_n)_{n\geqslant 1}$ から作られました。いま、これを n だけ右にずらした sequence

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots > 0$$

から作られる関数 $L^{(n)}(x) = L(x;(a_k)_{k>n})$ を考えます。また expansion $x = .x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots$ を n ずらして得られる小数部分を

$$T^n x = .x(n+1)x(n+2)\ \cdots$$

とおきます。そうしますと、Formula 3 の $L(x)$ の最後の式の第 $n+1$ 項以降は

$$\sum_{k>n} x(k)\, P(x(1),\cdots x(n-1), x(n), x(n+1)\cdots \widehat{x}(k))$$
$$= P(x(1),\cdots x(n-1), x(n))\, L^{(n)}(T^n x)$$

と表現されます：

Formula 4. $L(x)$ が x において *continuous* の場合は、$x = .x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots$ のとき、各 $n \geqslant 1$ について

$$L(x) = L(x^{(n)})\ +\ P(x(1),\cdots, x(n))\ L^{(n)}(T^n x)$$

where $\quad x^{(n)} = .x(1)x(2)\cdots x(n), \quad T^n x = .x(n+1)x(n+2)\ \cdots$

と表される。□

これは、$L(\ )$ の fractal 的な構造を反映している式であると言えます。つまり、細部に行けば行くほど

$$L,\ L^{(1)}, L^{(2)}, \cdots\ L^{(n)} \cdots$$

の構造が順次現れてくる、ということを言っています。

とくに、$a_n = a\ \ (0 < a < 1$ is constant) の場合は $L^{(n)}$ は $L = L_a$ に一致しますので、Formula 4 は

$$L_a(x) = L_a(x^{(n)})\ +\ P(x(1),\cdots, x(n))\ L_a(T^n x)$$

where $\ b = 1-a, \quad P(x(1),\cdots x(k)) = a^{O_k(x)}\, b^{I_k(x)}$ となり、この式の中に $L_a(\ )$ の self-similar な構造がよく見えてます。

7. Flatness of L

Lemma 3. $x \in [0,1)$ の *binary expansion* $.x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots$ において $x(m) = 0$ であるとき、

$$0 < L(x+2^{-m}) - L(x) \leqslant \prod_{x(n)=0,\ n<m} a_n$$

Proof. $x(m)=0$ だから Formula 1 (3) より $|L(x+2^{-m})-L(x)| \leqslant P(x(1),\cdots x(m-1))$ となる。$P(x(1),\cdots x(m-1)) \leqslant \prod_{x(n)=0,\, n<m} a_n$ だから Lemma が成立する。 □

Digit 0 の "lower density" を

$$\underline{d_0}(x) = \liminf_{n\to\infty} \#0(x;n))/n$$

と定めます。 $d_0(x)$ と違って、x の binary expansion が 1 つ与えられれば、この極限はいつも存在します。ただ、$x \in Q_2$ については 2つある expansion のどちらを選ぶかは指定しておく必要があります。

いま、x の expansion $.x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots$ において $x(n)=0$ となる n が無限個現れている場合を考え、これらの n すべてを count する function を $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ とします。そうしますと

$$1 \leqslant g(1) < g(2) < \cdots < g(k) < \cdots; \quad x(g(k))=0,$$

$$\underline{d_0}(x) = \liminf_{k\to\infty} k/g(k)$$

となっています。このとき、 次の定理の中に現れている条件 $\underline{d_0}(x)>0$ は

「すべての $k \geqslant 1$ について $k/g(k) > c > 0$ すなわち $g(k) < k/c$ 」

となる定数 $c>0$ が存在する、ということと同じです。
また、条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ があれば、もちろん条件 $(\star\star)$ $\prod_{n\geqslant 1} a_n = 0$ は満たされています。

Theorem 2. $L(x)=L(x;(a_n)_{n\geqslant 1})$ の定義における $(a_n)_{n\geqslant 1}$ は条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

を満たしているとします。このとき、 $\underline{d_0}(x) > 0$ となる expansion をもつ $x \in [0,1)$ に対して、すべての $s=1,2,\overline{3}\cdots$ について

$$\lim_{h\to+0} (L(x+h)-L(x))\, h^{-s} = 0$$

が成立する（もちろん $L'_+(x)=0$ となっている)。

Proof. 上で述べたように、$x(n)=0$ となる n の counting function g を考えますと

$$0 < \cdots < 2^{-g(k+1)} < 2^{-g(k)} < \cdots < 2^{-g(1)} \leqslant 1/2$$

となります。いま、 $2^{-g(k+1)} \leqslant h < 2^{-g(k)}$ としますと、 L が increasing であることと Lemma 3 とから、(記号簡略のため) $a_{g(n)} = d_n$ とおきますと

$$L(x+h)-L(x) \leqslant L(x+2^{-g(k)})-L(x) \leqslant d_1 d_2 \cdots d_{k-1}$$

となります。$s \geqslant 1$ を固定します。また条件 $\underline{d_0}(x) > 0$ より、上で述べたように、$k \leqslant g(k) \leqslant k/c$ for all $k \geqslant 1$ となる $c > 0$ が存在しますので、この c も固定しておきます。そうしますと $h^{-s} \leqslant 2^{s\,g(k+1)} \leqslant 2^{s\,(k+1)/c}$ ですから

$$(L(x+h) - L(x))\, h^{-s} \leqslant (d_1 d_2 \cdots d_{k-1})\, 2^{s\,(k+1)/c}$$

となります。$C = 2^{s/c}$ とおきますとこれは（値としては かなり大きいですが）定数であり、右辺 は

$$= (d_1 d_2 \cdots d_{k-1})\, C^{k+1} = C^2\, (C\, d_1)(C\, d_2) \cdots (C\, d_{k-1})$$

となります。仮定 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ から $d_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 従って

$$C\, d_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

ですから、$k \to \infty$, i.e., $h \to +0$ のとき

$$(L(x+h) - L(x))\, h^{-s} \to 0$$

が結論されます。□

$d_0(x) = \alpha$ となる $x \in [0,1)$ の全体を $N(\alpha)$ と表しましたが、この定理における $\underline{d_0}(x) > 0$ となる $x \in [0,1)$ の全体というのは $N(\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ すべてを含む "大きな" 集合です。前にも述べましたように $N(1/2)$ は binary normal numbers の全体で Lebesgue measure 1 ですから、Theorem 2 を満たす $x \in [0,1)$ は、Lebesgue measure の観点からは ふんだんにある、ということになります。$N(\alpha)$ については、その Hausdorff dimension などが詳しく調べられています（cf.[2] [4]）。Theorem 2 は $\underline{d_0}(x) > 0$ となる $x \in [0,1)$ において L のグラフは非常に flat になる、ということを表現しており、L の連続性を仮定すれば、もちろん Theorem 1 の条件 $(\star)$ がすべて満足されます（次の Remark 参照）。実際、$x_0 \in [0,1)$, $\underline{d_0}(x_0) > 0$, $y_0 = L(x_0)$ とし、(x_0, y_0) においてグラフ L に上方から接する半径 r の円周 S_r をとり、この円周上の任意の点 $(x_0 + h, y)$ where $x_0 + h < 1$, $0 < h < r$, $y_0 < y < y_0 + r$ を考えますと

$$y - y_0 = r - (r^2 - h^2)^{1/2} > h^2/2r, \quad \textit{i.e.}, \quad (y - y_0)\, h^{-2} > 1/2r$$

となりますから、どんなに半径 r が大きい円 S_r を考えても、Theorem 2 において $s = 2$ の場合を考えれば、(x_0, y_0) の十分小さい近傍においては、グラフ L は円 S_r より下にあることになります。車のタイヤがパンクしたとき flat tire と言いますが、円周の代わりにこの flat tire のような形のものを考えても同様です。たとえば、円周 $x^2 + y^2 = r^2$ の代わりに flat tire のような曲線 $x^4 + y^4 = r^4$ を考えた場合、上の式に相当するものは

$$y - y_0 = r - (r^4 - h^4)^{1/4} > h^4/4r^3$$

となりますので、Theorem 2 において $s = 4$ の場合を考えれば十分です。グラフ L がいかに flat であるかが、おわかりいただけると思います。

Remark 2. Theorem 1 の条件 $(\star)$ を満たす Jordan curve l の存在だけならば、別に L の連続性を仮定しなくても導きだすことができます。実際、Theorem 2 の L を考えれば、L の不連続点全体 $Q_2 \cup \{1\}$ は高々 countable

ですから、これらの点を除いても $\underline{d_0}(x_0) > 0$ を満たす点は 豊富に（Lebesgue measure 1）あります。よって L の不連続点における gaps を自然に垂直な線分で結んで得られる Jordan arc l を考えれば、目的が達せられます。この場合、 $Graph(L) \subset l$ となっており、実は l は最後の Section 9 で構成する G_∞ になっています。

Remark 3. 前節で L_a は a が小さいと x 軸にへばりつくような形になってしまう、と言ったのですが、Theorem 2 の $L(x) = L(x; (a_n)_{n\geqslant 1})$ はどうでしょうか。この場合、L に連続性の条件 $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \infty$ を付けた場合でも、最初の有限項 $0 < a_1, a_2, \cdots, a_m < 1$ はどのように選んでも Theorem 2 の結果に影響しません。したがって、 $L(x)$ の形にはかなりの自由度があります。たとえば、$0 < a_1, a_2 < 1$ を自由に選んで、$L(1/2)$, $L(1/4)$ に対応する点 $(1/2, a_1)$, $(1/4, a_1 a_2)$ の配置を動かすことができます。ちなみに、証明は省略しますが、L のグラフの下の面積は

$$\int_0^1 L(x; (a_n)_{n\geqslant 1})\, dx = \sum_{n\geqslant 1} a_n\, 2^{-n} \ > \ a_1/2 + a_2/4$$

になります。

8. Properties of $L(x)$

Theorem 1, Theorem 2 により、当初の目的は達成されたのですが、関数 $L(x)$ 自身が幾何学的に興味深いですので、もう少し、その性質を調べていきます。Theorem 2 では、右からの極限 $h \to +0$ を考えましたが、左からの極限はどうなるでしょうか。Q_2 の点で調べてみます。$x \in Q_2$ は、2つある expansion のうちの1つは条件 $\underline{d_0}(x) > 0$ を満たしますから、Theorem 2 が成立し、とくに $L'_+(x) = 0$ となっています。つまり、右側から見ると非常に flat なのです。しかし、次の結果は、左から見ると絶壁のようになっていることを示しています。

Theorem 3. （1） $limsup_{n\to\infty}\, a_n < 1/2$ のときは、すべての $x \in Q_2$ について

$$L'_-(x) = \lim_{h\to+0} \ (L(x) - L(x-h))\, h^{-1} = +\infty$$

（2） $lim_{n\to\infty}\, a_n = 0$ のときは、すべての $x \in Q_2$，及びすべての $s = 1, 2, 3 \cdots$ について

$$\lim_{h\to+0} \ (L(x) - L(x-h))\, h^{-1/s} = +\infty$$

Proof. $x = .x(1)\cdots x(m-1)\, 1 \in Q_2^{(m)}$ とし、 $s \geqslant 1$ を固定しておく。任意の $n > m$ をとりますと、Formula 1 (2) より

$$\begin{aligned} L(x) - L(x - 2^{-n}) &= P(x(1)\cdots x(m-1)\, 0\, 1^{n-m}) \\ &= P(x(1)\cdots x(m-1)\, 0)\ b_{m+1} b_{m+2} \cdots b_n \end{aligned}$$

となります。いま、$n > m$ について $2^{-n} \leqslant h < 2^{-(n-1)}$ としますと、
L は increasing ですから

$$(L(x) - L(x-h))\, h^{-1/s} \geqslant (L(x) - L(x-2^{-n}))\, 2^{(n-1)/s}$$
$$= P(x(1)\cdots x(m-1)\,0)\ b_{m+1}b_{m+2}\cdots b_n\, 2^{(n-1)/s}$$

となります。この右辺が $n \to \infty$ のとき ∞ になることを示せばよいわけです。$2^{1/s} = C$ とおきますと、この C は 1 より大きい定数で、右辺は

$$= P(x(1)\cdots x(m-1)\,0)\ C^{m-1}(Cb_{m+1})(Cb_{m+2})\cdots(Cb_n)$$

と表されます。
（1）の場合は　$C = 2,\ liminf_{n\to\infty} b_n > 1/2$ より $liminf_{n\to\infty} Cb_n > 1$
（2）の場合は　$lim_{n\to\infty} b_n = 1$ より　$lim_{n\to\infty} Cb_n = C > 1$
となりますから、どちらの場合も $n \to \infty$ のとき

$$(Cb_{m+1})(Cb_{m+2})\cdots(Cb_n) \to \infty$$

となり、Theorem が成立します。　□

以上のようにして、Formulae 1~4 等を駆使して計算すれば、$L(x)$ の性質として次のような結果を導き出すことができます。

すべての $s = 1, 2, 3\cdots$ について

$$\lim_{h\to+0} (L(x+h) - L(x))\, h^{-s} = 0,$$
$$\lim_{h\to+0} (L(x) - L(x-h))\, h^{-s} = 0,$$
$$\lim_{h\to+0} (L(x+h) - L(x))\, h^{-1/s} = +\infty,$$
$$\lim_{h\to+0} (L(x) - L(x-h))\, h^{-1/s} = +\infty$$

となっているとき、それぞれ L は x において
　右から *extremely flat,*　　左から *extremely flat,*
　右から *extremely steep,*　左から *extremely steep*
であると表現することにします。 また subset $A \subseteq [0,1]$ が
「任意の open interval (a,b) where $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ に対し
　$(a,b) \cap A$ は a copy of Cantor set C を含む」という性質を持つとき、
A は *Cantor-dense in* [0,1] である、と言うことにします。
　$\overline{d_0}(x) = lim\,sup_{n\to\infty} O_n(x)/n$ は Digit 0 の "upper density" を表しています。

Remarkable Properties of $L(x)$

$0 < a_n < 1\ \ (n \geqslant 1)$ が条件

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

を満たしているとき、$L(x) = L(x; (a_n)_{n\geqslant 1})$ は次の性質を持つ：

（１）$L(x)$ の微分係数が取り得る値は 0 と $+\infty$ のみである。すなわち $L'_-(x)$, $L'_+(x)$ の確定値は 0 と $+\infty$ のみである。
（２） Q_2 の点では L は右から extremely flat、左から extremely steep である。
（３） $\underline{d_0}(x) > 0$ となる expansion をもつ $x \in [0, 1)$ においては L は右から extremely flat である。更に、$0 < \underline{d_0}(x) \leqslant \overline{d_0}(x) < 1$ となる expansion をもつ $x \in (0, 1)$ においては L は右からも左からも extremely flat である。とくに $\bigcup_{0<\alpha<1} N(\alpha)$ の point x はこの性質を持つので、かかる points は Lebesgue measure 1 の集合を成している。
（４）$L'_-(x) = L'_+(x) = +\infty$ となる points x の全体は、上の（３）より Lebesgue measure 0 であるが、Cantor-dense in [0,1] になっている。 □

性質 (1) は $L_a(x)$ については知られているもので、$L_a(x)$ の場合と同様にして示されます（証明略)。性質 (2) と、(3) の前半は確認済み。(3) の後半は Theorem 2 と同様にして証明されます（証明略)。性質 (4) は 次の結果から導かれます。

Fact 6. (cf. [1]) *Strictly increasing, continuous, singular function* の逆関数もまた *singular* になる。

ここで "singular" と言っているのは、「微分が Lebesgue measure の意味でほとんど至る所 0」という意味です。
実際、この Fact より L の逆関数 L^{-1} は singular ですから、Lebesgue measure 1 の集合 A で、その上で L^{-1} の微分係数が 0 になっているものが存在します。Lebesgue measure 1 の集合は Cantor-dense ですから、 A は Cantor-dense です。$L^{-1}(A)$ は Cantor-dense set の homeomorphic image として Cantor-dense です。明らかに $L^{-1}(A)$ 上で L の微分係数は $+\infty$ になっています。
今まで、Lebesgue measure の観点で見てきましたが、最後に Topological な観点から測ってみましょう。Topological に 「大きさ」を測る "ものさし" として 1-st category, 2-nd category の概念がありますので、これで測りますと、かなり意外な結果が得られます。細かい議論を避けるため、上で述べた条件 $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \infty,\ \ lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を仮定しておきますと：

Theorem 4. $L'_-(x)$, $L'_+(x)$ が確定 $(0$ or $+\infty)$ する *points* x の全体は *1-st category set in* $[0, 1]$ である。

Proof. $L'_+(x) = 0,\ \ L'_-(x) = 0,\ \ L'_+(x) = +\infty,\ \ L'_-(x) = +\infty$ となる point x から成る集合をそれぞれ A_0^+, A_0^-, A_∞^+, A_∞^- とおきます。
$A_0^+ \cup A_\infty^+$ が 1-st category set in $[0, 1]$ になることを示します（$A_0^- \cup A_\infty^-$ の場合も同様です)。条件 $L'_+(x) = 0$ は

$$\forall n \geqslant 1\ \ \exists m \geqslant 1\ \ 0 < \forall h < 1/m \quad (L(x+h) - L(x))/h \leqslant 1/n$$

と表され、条件 $L'_+(x)=+\infty$ は、この最後の $\leqslant 1/n$ を $\geqslant n$ で置き換えたもので表されます。よって

$$E(m,n)=\{x\in[0,1]\ :\ 0<\forall h<1/m\quad (L(x+h)-L(x))/h\leqslant 1/n\},$$
$$F(m,n)=\{x\in[0,1]\ :\ 0<\forall h<1/m\quad (L(x+h)-L(x))/h\geqslant n\ \}$$

とおきますと

$$A_0^+=\bigcap_n\bigcup_m E(m,n)\subseteq\bigcup_m E(m,1),\quad A_\infty^+=\bigcap_n\bigcup_m F(m,n)\subseteq\bigcup_m F(m,1)$$

となります。ゆえに、$E(m,1)$, $F(m,1)$ が nowhere dense, closed in [0,1] であることを示せば十分です。いま、L は continuous と仮定していますから、$h>0$ を固定した場合、$(L(x+h)-L(x))/h$ は continuous function です。よって、$E(m,1)$, $F(m,1)$ は closed sets になります。一方、明らかに

$$E(m,1)\cap A_\infty^+=\emptyset=F(m,1)\cap A_0^+$$

です。既に確認したように、A_∞^+, A_0^+ はどちらも Cantor-dense でしたから、とくに dense です。よって、$E(m,1)$, $F(m,1)$ はそれぞれ dense sets A_∞^+, A_0^+ を含まない closed sets であり、従って、nowhere dense です。 □

9. Geometric Construction of $L(x)$

$L(x)$ の奇妙な性質（とくに Theorem 2 ）を検討すればするほど

「えーっ、こんな変な関数が本当に存在するの一 !?」

という気分が湧いてきます。とくに、$L(x)$ の確率論的な構成に一抹の不安を抱く人 (topologist?) もいるかと思います。そこで最後に、$L(x)$ を幾何学的に構成してみます。

$0<a_n<1$, $b_n=1-a_n$ $(n\geqslant 1)$ として maps $\phi_n^0,\phi_n^1:[0,1]^2\to[0,1]^2$ を

$$\phi_n^0(x,y)=(x/2,\ a_ny),\quad \phi_n^1(x,y)=(1/2+x/2,\ a_n+b_ny)$$

と定めます。これらは linear contractions であり ϕ_n^0, ϕ_n^1 によって正方形 $[0,1]^2$ はそれぞれ、高さ a_n の長方形 $[0,1/2]\times[0,a_n]$, 高さ b_n の長方形 $[1/2,1]\times[a_n,1]$ へ写され、この 2 つの長方形は 1 点

$$\phi_n^0(1,1)=(1/2,\ a_n)=\phi_n^1(0,0)$$

のみを共有しています。Finite seq. $\sigma:\{1,2,\cdots,n\}\to\{0,1\}$ に対し

$$\phi^\sigma=\phi_1^{\sigma(1)}\circ\phi_2^{\sigma(2)}\circ\cdots\circ\phi_n^{\sigma(n)}:[0,1]^2\to[0,1]^2$$

と定めますと、$\phi^\sigma([0,1]^2)$ は横幅が 2^{-n}, 高さが $P(\sigma)$ の 長方形になります。

$$G_n=\bigcup_{|\sigma|=n}\phi^\sigma([0,1]^2),\quad G_\infty=\bigcap_{n\geqslant 1}G_n$$

とおきますと、G_n $(n\geqslant 1)$ は compact connected sets の decreasing sequence ですから G_∞ も compact connected になります。G_n は数珠が繋がったよう

な形の集合ですが、$|\sigma| \to \infty$ のとき $\phi^{\sigma}([0,1]^2)$ の横幅 $2^{-n} \to 0$ であることを考慮しますと、G_∞ は Jordan arc になることがわかります。明らかに G_∞ は points $(x, L(x))$ for $x \in Q_2$ を含み、$L(x)$ は（たとえ continuous にならないときでも）right-continuous ですから、結局 $L(x)$ のグラフは G_∞ に含まれます。

$a_n = 1/(n+1)$ $(n \geqslant 1)$ の場合の G_6 を描いたのが、次の Figure 3 です。

L が continuous になる条件は、G_∞ と各 vertical line $\{x\} \times [0,1]$ $(x \in [0,1])$ との共通部分が 1 点になる、ということと同じであって、この場合 G_∞ は L のグラフそのものです。この幾何学的構成法の優れている点は、L が continuous でないときでも、Jordan arc G_∞ 自体を利用した研究ができる、ということで、既にそのような応用の 1 つを Remark 2 で指摘しました。また、たとえば、L が continuous でないときは G_∞ は 1 価関数のグラフにはなりませんが、L の「逆関数」に対応するもの、つまり、$y \in [0,1]$ に $(x,y) \in G_\infty$ となる $x \in [0,1]$ を対応させれば、これはちゃんと 1 価関数になります！

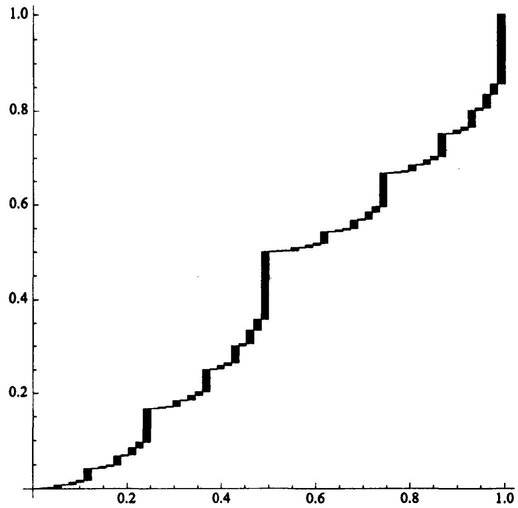

FIG. 3. an approach to $L(x)$

References

[1] L.Berg, M.Krüppel, *De Rham's Singular Function and Related Functions*, Journal for Analysis and its Applications 19 No.1 (2000),227-237.

[2] P.Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley,New York (1978).

[3] R.Engelking, *General Topology*, Polish Sci. Publ., Warszawa (1977).

[4] K.Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley,New York (1990).

[5] G.Gruenhage, *Generalized Metric Spaces*, Handbook of Set-theoretic Topology (Eds: K. Kunen, J. E. Vaughan), North-Holland (1984), 423-501.

[6] A. Kato, *New topologies on the globe*, 数理解析研究所講究録, 1781 (2012年3月), 38-53.

[7] A. Kato, *Generalized metric topologies of the Earth*, Topology Proceedings, 42 (2013), 73-90.

[8] K.Kawamura, *On the set of points where Lebesgue's singular function has the derivative zero*, Proc.Japan Acad.,87, Ser.A (2011), 162-166.

[9] Z.Lomnicki and S.Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application an calcul des probabilités I, Variables indépendantes*, Fund.Math.23 (1934), 237-278.

[10] 山口昌也, 畑政義, 木上淳, **フラクタルの数理**, 岩波書店（岩波講座 応用数学 対象 7）(1993).

Department of Mathematics, National Defense Academy, Yokosuka 239-8686, Japan

E-mail address: `akiokato@nda.ac.jp`